

"प्रश्न-पत्र पर क्रमांक (रोल नम्बर) के अतिरिक्त कुछ भी न लिखें, अन्यथा इसे अनुचित साधनों का प्रयोग माना जायेगा तथा नियमों के अनुसार कार्यवाही की जायेगी।"

"Do not write anything on question-paper except Roll Number, otherwise it shall be deemed as an act of indulging in unfair means and action shall be taken as per rules."

Roll No.

B.Sc./B.A. (F)

1622

Maths. I

B.Sc./B.A. (Final) Examination of the
Three-Year Degree Course, 2024
MATHEMATICS
PAPER - I
(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

Part-A

भाग-अ

Note : 1. The questions of Part-A are compulsory. The answers of these questions are limited up to 30 words each. Each question carries 02 mark.

1622 / 2500 / 8

(1)

P.T.O.

Part-A

भाग-अ

1. (a) Define Cyclic Group.
चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिये।
- (b) Write definition of Abelian group
आबेली समूह की परिभाषा लिखिये।
- (c) Define Normal Subgroup.
विशिष्ट उपसमूह को परिभाषित कीजिये।
- (d) State Lagrange's theorem.
लाग्रान्ज-प्रमेय का कथन कीजिए।
- (e) Define an Integral Domain.
पूर्णाकीय प्रांत को परिभाषित कीजिए।
- (f) Give an example of a ring whose characteristic is 7.
एक वलय का उदाहरण दीजिये जिसका अभिलक्षण 7 है।
- (g) Define Quotient Ring.
विभाग वलय को परिभाषित कीजिये।
- (h) Give an example of Vector Space.
सदिश समष्टि का एक उदाहरण दीजिये।

2 / 2500 / 8

(3)

P.T.O.

(i) Define Quotient Space.

विभाग समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(j) Define Linear Transformation.

रेखक रूपांतरण को परिभाषित कीजिये।

Part-B

भाग-ब

Unit-I / इकाई-I

2. (a) Prove that the order of an element of a group is always equal to the order of its inverse.

सिद्ध कीजिये कि समूह में किसी अवयव की कोटि सदैव उसके प्रतिलोम की कोटि के समान होती है।

OR / अथवा

- (b) Prove that the order of a cycle of length r is r .

सिद्ध कीजिये कि r लम्बाई के चक्र की कोटि r होती है।

Unit-II / इकाई-II

3. (a) Show that any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either identical or disjoint.

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह के उपसमूह के कोई दो दक्षिण

(वाम) सहकुलक या तो समान होंगे या असंयुक्त होंगे।

OR / अथवा

- (b) If f is a homomorphism of a group G to G' with kernel K , then K is a subgroup of G .

यदि f समूह G से G' पर एक समाकरिता हो तो f की अष्टि K समूह G का उपसमूह होता है।

Unit-III / इकाई-III

4. (a) If $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ then prove that S is a subring of $(\mathbb{R}, +, \times)$, where \mathbb{R} is set of real numbers.

यदि $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ तब सिद्ध करो कि S वलय $(\mathbb{R}, +, \times)$ का उपवलय है, जहाँ \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

OR / अथवा

- (b) Prove that the field $(\mathbb{Q}, +, \times)$ of rational numbers is a prime field.

सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का क्षेत्र एक अभाज्य क्षेत्र है।

Unit-IV / इकाई-IV

5. (a) Prove that the set $m\mathbb{Z} = \{mx : x \in \mathbb{Z}\}$, where m is an Integer, is an ideal of ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ of integers.

1622 / 2500 / 8

(4)

1622 / 2500 / 8

(5)

P.T.O.

सिद्ध कीजिये की समुच्चय $m\mathbb{Z} = \{mx : x \in \mathbb{Z}\}$ जहाँ m एक पूर्णांक है पूर्ण संख्याओं की वलय $(\mathbb{Z}, +, \times)$ की गुणजावली है।

OR / अथवा

- (b) In vector space $V_3(\mathbb{R})$ express $v = (1, -2, 5)$ as a linear combination of the given vectors $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, -1, 1)$ and $v_3 = (1, 1, 1)$.
सदिश समष्टि $V_3(\mathbb{R})$ में $v = (1, -2, 5)$ को दिये गये सदिशों $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, -1, 1)$ तथा $v_3 = (1, 1, 1)$ के एकघात संघ में व्यक्त कीजिये।

Unit-V / इकाई-V

6. (a) Prove that the mapping $f : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ defined by $f[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1, u_2)$ is a homomorphism and also find its kernel.
सिद्ध कीजिये कि प्रतिचित्रण $f : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है $f[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1, u_2)$ एक समाकरिता होगी तथा इसकी अष्टि भी ज्ञात कीजिये।

OR / अथवा

- (b) Prove that every finite dimensional vector space has a basis.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित विमा वाले सदिश समष्टि का एक आधार होता है।

Part-C

भाग-स

7. Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्याकारी होता है।

8. If H and K are finite subgroups of a group G and are of orders $O(H)$ and $O(K)$, respectively, then show that

$$O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \cap K)}$$

यदि H और K किसी समूह G के परिमित उपसमूह हैं और उनकी कोटि क्रमशः $O(H)$ व $O(K)$ हैं तो सिद्ध कीजिये कि

$$O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \cap K)}$$

9. Show that the set of Gaussian integers $J = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ form a ring with respect to ordinary addition and multiplication of complex numbers. Is it a field?

सिद्ध कीजिये कि गाऊसीय पूर्णांकों का समुच्चय $J = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ समिश्र संख्याओं के योग और गुणन के लिये एक वलय है। क्या यह एक क्षेत्र है?

10. Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace if and only if either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$.

11. Prove that any two bases of a finite dimensional vector space V have the same number of elements.

सिद्ध कीजिये कि परिमित विमीय सदिश समष्टि V के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

--X--

<https://www.jnvuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से