

*"पत्र-पत्र पर केवल (रोल नम्बर) के अतिरिक्त कुछ भी न लिखें, अन्यथा इसे अनुचित साधनों का प्रयोग माना जायेगा तथा विद्यार्थी के उत्तर कसौटी की जायेगी।"*  
*"Do not write anything on question-paper except Roll Number, otherwise it shall be deemed as an act of indulging in unfair means and action shall be taken as per rules."*

Roll No. ....

B.Sc./B.A. (F)

1622

Maths. I

B.Sc./B.A. (Final) Examination of the  
Three-Year Degree Course, 2023

MATHEMATICS

PAPER - I

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

Part-A

भाग-अ

Note : 1. The questions of Part-A are compulsory. The answers of these questions are limited upto 30 words each. Each question carries 02 marks.

Part-A

भाग - अ

1. (a) Define order of an element of a group.  
किसी समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिये।
- (b) Define even and odd permutations.  
सम एवं विषम क्रमचय को परिभाषित कीजिये।
- (c) Define normaliser of an element of a group.  
किसी समूह के अवयव के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिये।
- (d) Define Group Homomorphism.  
समूह समाकारिता को परिभाषित कीजिये।
- (e) Define an Integral Domain.  
पूर्णांकीय प्रांत को परिभाषित कीजिये।
- (f) Define characteristic of a ring.  
वलय का अभिलक्षण को परिभाषित कीजिये।
- (g) Define an ideal of a ring.  
वलय की गुणजावली को परिभाषित कीजिये।
- (h) Define linearly dependent and independent vectors.  
एकघाततः स्वतन्त्र एवं परतन्त्र सदिश को परिभाषित कीजिये।

622 / 5500 / 8

(1)

P.T.O.

<https://www.jnvuonline.com>

22 / 5500 / 8

(3)

P.T.O.

<https://www.jnvuonline.com>

(i) Define dimension of a vector space.

सदिश समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिये।

(j) Define rank and nullity of a linear transformation.

रैखिक रूपान्तरण की कोटि एवं शून्यता को परिभाषित कीजिये।

### Part-B

### भाग-ब

#### Unit-I / इकाई-I

2. (a) If  $a$  and  $b$  are any two elements of a group  $G$ , then prove that  $(ab)^2 = a^2b^2$  iff  $G$  is abelian.

यदि  $a$  व  $b$  किसी ग्रुप  $G$  के कोई दो अवयव हैं, तो सिद्ध कीजिये कि  $(ab)^2 = a^2b^2$  यदि और केवल यदि  $G$  आवेली है।

#### OR / अथवा

(b) Prove that each and every infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय ग्रुप के दो और केवल दो जनक होते हैं।

#### Unit-II / इकाई-II

(a) Prove that the union of two subgroups of a group  $G$  is again a subgroup if and only if one is contained in the other.

सिद्ध कीजिये कि किसी ग्रुप  $G$  के दो उपग्रुपों का संघ भी एक उपग्रुप होगा है यदि और केवल यदि दोनों एक दूसरे में अंतर्निहित हैं।

#### OR / अथवा

(b) Prove that a subgroup  $N$  of a group  $G$  is normal subgroup of  $G$  if and only if the product of two right (left) cosets of  $N$  in  $G$  is again a right (left) coset of  $N$  in  $G$ .

सिद्ध कीजिये कि किसी ग्रुप  $G$  का कोई उपग्रुप  $N$  एक विशिष्ट उपग्रुप होता है यदि और केवल यदि  $G$  में  $N$  के किन्हीं दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय का गुणन  $N$  का एक दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय है।

#### Unit-III / इकाई-III

4. (a) Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field.

सिद्ध कीजिये कि शून्य के भाजकों से रहित एक परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

#### OR / अथवा

(b) Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.

सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है।

Unit-IV / इकाई-IV

5. (a) Prove that the intersection of two subrings is also a subring of a ring.

सिद्ध कीजिये कि किसी वलय के दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

OR / अथवा

- (b) Prove that the linear span  $L(S)$  of subset  $S$  of a vector space  $V(F)$  is the smallest subspace of  $V(F)$  containing  $S$ .

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि  $V(F)$  के उप-समुच्चय  $S$  की एक घाततः विस्तृति  $L(S)$ ,  $S$  को अन्तर्विष्ट करने वाला  $V$  का न्यूनतम उपसमष्टि है।

Unit-V / इकाई-V

6. (a) Prove that every finite dimensional vector space has a basis.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित विमा वाले सदिश समष्टि का एक आधार होता है।

OR / अथवा

- (b) Prove that any two basis of a finite dimensional vector space  $V$  consists of same number of elements.

सिद्ध कीजिये कि परिमित विमीय सदिश समष्टि  $V$  के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

Part-C

भाग-स

Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारी होता है।

Prove that the order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.

सिद्ध कीजिये कि एक परिमित ग्रुप के प्रत्येक उपग्रुप की कोटि, उस ग्रुप की कोटि का भाजक होता है।

Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-empty subset  $K$  of a field  $F$  to be a subfield are :

सिद्ध कीजिये कि क्षेत्र  $F$  के अरिक्त उपसमुच्चय  $K$  का उपक्षेत्र होने के लिये आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है :

(i)  $a \in K, b \in K \Rightarrow a - b \in K$

(ii)  $a \in K, b \in K, b \neq 0 \Rightarrow ab^{-1} \in K$

10. Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset  $W$  of a vector space  $V(F)$  to be a subspace of  $V(F)$  is  $w_1, w_2 \in W$  and  $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in W$ .

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि  $V(F)$  के एक अरिक्त उपसमुच्चय  $W$  के  $V(F)$  की उपसमष्टि होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि  $w_1, w_2 \in W$  and  $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in W$ .

11. If  $W(F)$  is a subspace of a finite dimensional vector space  $V(F)$ , then prove that the quotient space  $(V/W)(F)$  is also finite dimensional and  $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ .

यदि  $W(F)$  परिमित विमीय सदिश समष्टि  $V(F)$  का एक उपसमष्टि है तो सिद्ध कीजिये कि खण्ड समष्टि  $(V/W)(F)$  भी परिमित विमा का होता है तथा विमा  $(V/W) = \text{विमा } V - \text{विमा } W$ .

--X--

<https://www.jnvuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

<https://www.jnvuonline.com>