

"Do not write anything on question-paper except Roll Number, otherwise it shall be deemed as an act of indulging in unfair means and action shall be taken as per rules."

“प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर के अतिरिक्त कुछ भी न लिखें, अन्यथा इसे अनुचित साधनों में लिप्त माना जायेगा और नियमानुसार कार्यवाही की जायेगी।”

Roll N

B.Sc./B.A.- (S-II)

MATHS

10057 NEP

BACHELOR OF SCIENCE/ARTS

(Semester-II) Examination, 2024

(MATHS)

DCC-MAT5002T

Algebra

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 70

Part-A

भाग-अ

Note : 1. The questions of Part-A are compulsory. The answers of these questions are limited up to 30 words each. Each question carries 02 marks.

10057 NEP / 2500 / 10 (1)

P.T.O.

<https://www.jnvuonline.com>

भाग-अ के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। इन प्रश्नों के उत्तर अधिकतम 30 शब्दों तक सीमित हों। प्रत्येक प्रश्न 02 अंक का है।

Part-B

भाग-ब

2. Attempt **FIVE** questions in all, selecting **ONE** question either (a) or (b) from each unit. The answer of each question shall be limited up to **500** words. Each question carries **10** marks.

प्रत्येक इकाई से (a) अथवा (b) में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल मिलाकर पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों तक सीमित होगा। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Part-A

भाग-अ

1. State Cayley-Hamilton theorem.

कैले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन कीजिये।

2. Find the characteristic equation of the following matrix A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

10057 NEP / 2500 / 10 (2)

Contd.....

<https://www.jnvuonline.com>

निम्न मैट्रिक्स A की अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिये :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Define reciprocal equation. Give an example.
व्युत्क्रम समीकरण को परिभाषित कीजिये। एक उदाहरण दीजिये।
4. If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the value of symmetric function $\sum \alpha^2 \beta^2$.
यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं, तो सममित फलन $\sum \alpha^2 \beta^2$ का मान ज्ञात कीजिये।
5. Find order of each element of the group $(\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$.
समूह $(\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$ में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिये।
6. Define cyclic group.
चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिये।
7. Find cosets of H in group G, where :
 $H = (4Z, +); G = (Z, +)$
समूह G में H के सहसमुच्चय ज्ञात कीजिये, जहाँ :
 $H = (4Z, +); G = (Z, +)$

8. Define integral domain.
पूर्णांकिय प्रांत को परिभाषित कीजिये।
9. Define vector subspace.
सदिश उपसमष्टि को परिभाषित कीजिये।
10. Define linear span.
एकघाती विस्तृति को परिभाषित कीजिये।

Part-B

भाग-ब

Unit-I / इकाई-1

1. (a) Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the matrix A, where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A के अभिलाक्षणिक-मूल तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

OR / अथवा

- (b) Define rank of a matrix. Reduce the following matrix in the normal form and find its rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स की जाति को परिभाषित कीजिये। निम्न आव्यूह को अभिलम्ब रूप में समानीत कर जाति ज्ञात कीजिये :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Unit-II / इकाई-II

2. (a) (i) If sum of two roots of the equation $x^2 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ is zero, then find the solution of the equation.
- यदि समीकरण $x^2 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ के दो मूलों का योग शून्य है, तो समीकरण का हल ज्ञात कीजिये।
- (ii) Find the equation whose roots are increased by 2 than the following equation :

$$4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$$

वह समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों से 2 अधिक हैं :

$$4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$$

OR / अथवा

- (b) Solve the equation $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$ by Cardon's method.
- समीकरण $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिये।

Unit-III / इकाई-III

3. (a) (i) If $O(a)$ denotes the order of an element a of a group G , then show that $O(xax^{-1}) = O(a), \forall x \in G$.
- समूह G के एक अवयव a की कोटि $O(a)$ से प्रदर्शित हो, तो दर्शाइये कि $O(xax^{-1}) = O(a), \forall x \in G$.
- (ii) Let $(G, *)$ be a group and $H = \{x \in G : x * g = g * x, \forall g \in G\}$
- Show that H is a subgroup of G .

(G, *) एक समूह हैं और

$$H = \{x \in G : x * g = g * x, \forall g \in G\}$$

सिद्ध कीजिये कि H समूह G का उपसमूह है।

OR / अथवा

(b) (i) Find $\sigma^{-1}\rho\sigma$, when :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$\sigma = (134)(56)(2789).$$

$\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिये, जबकि :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ तथा}$$

$$\sigma = (134)(56)(2789).$$

(ii) Prove that the order of a cycle of length r is r.

सिद्ध कीजिये कि r लम्बाई के चक्र की कोटि r होती है।

Unit-IV / इकाई-IV

4. (a) Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब G के किसी अवशेष वर्ग समूह के तुल्याकारी होता है।

OR / अथवा

(b) Show that the set of Gaussian integers

$J = \{a + ib \mid a, b \in Z\}$ is a ring with respect to addition and multiplication of complex numbers. Is it an integral domain? Is it a field? <https://www.jnvuonline.com>

सिद्ध कीजिये कि गाउसीय पूर्णांको का समुच्चय $J = \{a + ib \mid a, b \in Z\}$ समिश्र संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए एक वलय है। क्या यह एक पूर्णाकीय प्रांत है? क्या यह एक क्षेत्र है?

Unit-V / इकाई-V

5. (a) If F be the field of real numbers and $V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$ be set of all n tuples.

If in this set we define the addition and scalar multiplication composition as follows :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) =$$

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \text{ and}$$

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

then prove that V is a vector space over the field $(F, +, \cdot)$.

यदि F वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है। तथा $V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$, n -टुपलों का एक समुच्चय है। यदि इस समुच्चय में योग तथा गुणन को निम्न प्रकार परिभाषित कीजिये :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) =$$

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \text{ तथा}$$

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n),$$

तो सिद्ध कीजिये कि V क्षेत्र $(F, +, \cdot)$ पर एक सदिश समष्टि है।

OR / अथवा

- (b) (i) In vector space $V_3(R)$ express $v = (1, -2, 5)$ as a linear combination of the given vectors $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (1, 1, 1)$.

सदिश समष्टि $V_3(R)$ में $v = (1, -2, 5)$ को $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (1, 1, 1)$ के एकघात संघटन में व्यक्त कीजिये।

- (ii) Examine the vectors $\alpha_1 = (-1, 2, 1); \alpha_2 = (3, 0, -1); \alpha_3 = (-1, 0, 1)$ of $V_3(R)$ for linear independence or linear dependence. सदिश समष्टि $V_3(R)$ के लिए सदिशों $\alpha_1 = (-1, 2, 1); \alpha_2 = (3, 0, -1); \alpha_3 = (-1, 0, 1)$ के रैखिक स्वतंत्र या रैखिक परतंत्र की जाँच कीजिये।

--x--